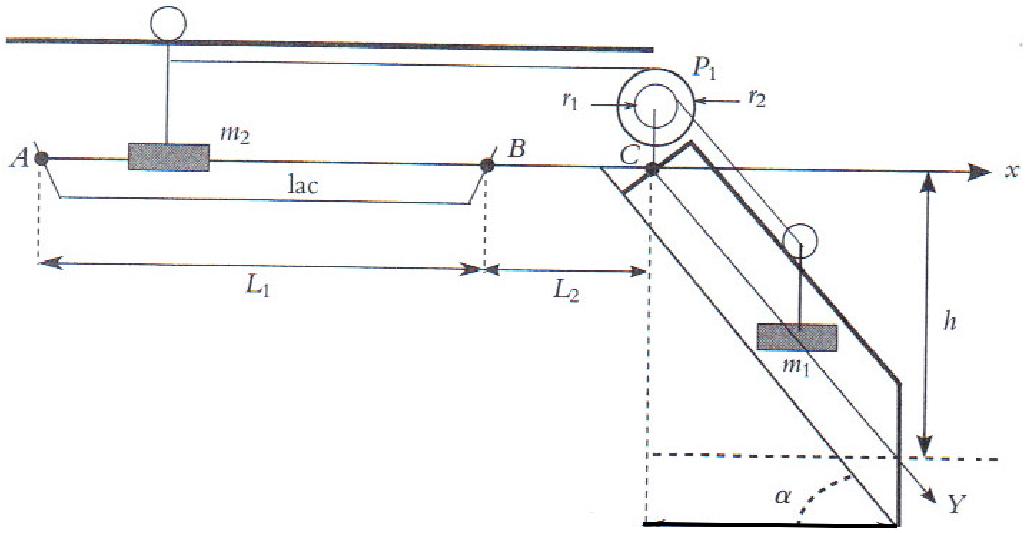
DM 8

Transport de troncs d'arbres

Un exploitant forestier doit évacuer des troncs d'arbres situés sur une parcelle de terrain en montagne en bordure d'un lac. Pour faciliter le transport, il utilise le poids des arbres au cours de leur descente pour en tracter d'autres à travers le lac (voir figure ci-dessous).



Au point C, un portique est installé qui supporte une poulie P_1 munie de deux gorges permettant l'enroulement des câbles. Sur la gorge de rayon r_1 sera enroulé le câble retenant dans sa descente un tronc de masse m_1 assimilé à un point matériel. Sur la gorge de rayon r_2 sera enroulé le câble tractant deux arbres à travers le lac, représentés par une masse ponctuelle m_2.

Les troncs sont suspendus à des câbles guidés par des poulies permettant un déplacement sans frottement. Les câbles sont inextensibles et de masses négligeables.

Les troncs et leurs supports sont assimilés à des points matériels dont la masse totale est celle des troncs.

Les troncs se déplaçant dans l'eau sont soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'eau :

$$\vec{F} = -k\vec{v} = -k\dot{x}\vec{e_x}$$

On donne : $g=9.8 ms^{-2}$; $m_1=500kg$; $m_2=1000kg$; $L_1=840m$; $L_2=4m$; $\alpha=45°$; $k=30 kg.s^{-1}$; $r_1=20cm$; $r_2=40cm$.

I Déplacement sur l'eau

1) On repère le déplacement de m_2 par la variable x de l'axe Ax. En notant T_2 la norme de la tension du câble, établir en projetant le PFD sur Ax, l'équation différentielle du mouvement de m_2.
2) On repère le déplacement de m_1 par la variable Y de l'axe CY. En notant T_1 la norme de la tension du câble, établir en projetant le PFD sur CY, l'équation différentielle du mouvement de m_1.
3) En remarquant que tous les points de la poulie P_1 tournent à la même vitesse angulaire, établir une relation entre $\dot{x}$, $\dot{Y}$, r_1 et r_2, puis entre $\ddot{x}$, $\ddot{Y}$, r_1 et r_2.
4) On admet que la poulie P_1 impose une relation entre les tensions : $T_2.r_2 - T_1.r_1 + \Gamma = 0$ où Γ est une grandeur positive constante modélisant l'action d'un frein sur la poulie.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que la vitesse $\dot{x}$ obéit à l'équation différentielle :

$M\ddot{x} + k\dot{x} = \lambda$ où $M = m_2 + m_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ et λ une constante qu'on exprimera en fonction de r_1, r_2, m_1, g, $\sin\alpha$ et Γ. Montrer à l'aide de l'équation précédente que $\dot{x}$ admet une limite v_L qu'on exprimera et dont on calculera la valeur numérique en prenant $\Gamma = 680\text{Nm}$.

5) Déterminer l'expression de $\dot{x}(t)$ sachant qu'à t=0, les troncs sont en A sans vitesse initiale. (On introduira v_L).
6) On pose $\tau = \frac{M}{k}$, déterminer l'expression de x(t) en fonction de t, τ et v_L, on rappelle que le point A est l'origine de l'axe Ax.

II Déplacement sur le sol

Après leur sortie du lac en B, les arbres se déplacent sur le sol. Ils sont alors soumis à une force de frottement solide $\vec{S} = -fm_2g.\vec{e}_x$ où f est le coefficient de frottement solide égal ici à : f=0,2. On n'exerce plus alors de freinage sur m_1 soit $\Gamma = 0$.

1) Reprendre les questions 1) et 2) du I et établir la nouvelle équation différentielle en $\ddot{x}$ du mouvement de m_2 en fonction de m_1, m_2, M, r_1, r_2, f, g et $\sin\alpha$.
2) Calculer l'accélération $\ddot{x}$, en déduire la nature du mouvement de m_2.
3) La vitesse en B étant v_L, calculer en prenant l'origine des temps en B, la date t_2 à laquelle la vitesse $\dot{x}$ s'annule.
4) En déduire la distance parcourue d_2 depuis le point B. Faire l'application numérique.

CHIMIE :

On ajoute progressivement dans v_0=10ml d'une solution aqueuse de $CO_{2,aq}$ (soit CO_2,H_2O) à $c_0=10^{-2}\text{mol.L}^{-1}$, de la soude à $c_B=1\text{mol.L}^{-1}$. (Na^+, OH^-). On négligera tout effet de dilution.

1) Quel est le pH de la solution initiale avant l'ajout de soude.
2) Ecrire les deux réactions acide-base successives qui se produisent lorsqu'on ajoute de la soude et calculer leurs constantes d'équilibre, K_{eq1} et K_{eq2}.
3) Quel est le volume v_B de soude qu'il faut ajouter à la solution initiale pour obtenir le premier saut de pH (c'est-à-dire pour neutraliser la première acidité) ? Justifier le fait qu'on néglige l'effet de dilution.
4) Calculer le pH de la solution obtenue après l'ajout d'un volume de soude égal à :
   a) $0{,}5v_B$
   b) v_B
   c) $1{,}5\ v_B$
   d) $2\ v_B$
5) Tracer l'allure de la courbe $pH=f(v_B)$.

On donne: $CO_{2,aq}/HCO_3^-$ $pKa_1 = 6{,}3$ et HCO_3^-/CO_3^{2-} $pKa_2=10{,}4$; PKe=14.